Ejercicios de Análisis Matemático I – Relación 3

42. Prueba que la imagen de un compacto por una función continua es un compacto.

43. Prueba que todo compacto en $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo.

44. **Propiedad de compacidad.** Sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un conjunto compacto K de un espacio métrico. Entonces f alcanza en K un máximo y un mínimo absolutos.

45. Sean (E, d) un espacio métrico, $f_i : E \to E$, $i = 1, 2, \dots, n$ funciones continuas. Consideremos el espacio métrico producto (E^n, ρ) y definamos $F : E^n \to E^n$ por

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))$$

Prueba que F es continua.

46. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua tal que para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\|$$

Prueba que la imagen de $\mathbf{F}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$.

La numeración de los ejercicios es la misma que hay en los apuntes del curso.

Para entregar el miércoles 17 de octubre.